Exponentialfunktionen - Bakterienwachstum

Definition der Exponentialfunktion:
Eine Exponentialfunktion liegt vor, wenn der Exponent einer Potenz als Variable betrachtet wird. Derartige Funktionen besitzen eine besondere Eigenschaft: In gleich großen Intervallen ändert sich ihr Funktionswert um den gleichen Faktor. Sie eignen sich daher hervorragend dazu, Wachstums- oder Zerfallsprozesse zu beschreiben, für die sich die betrachtete Größe in gleich langen Zeitintervallen um den gleichen Faktor ändert. Ihre Umkehrfunktionen heißen Logarithmen − ihr Zweck besteht darin, aus der Kenntnis einer Potenz und ihrer Basis den Exponenten zu gewinnen.

Beispielaufgabe:
Die Grundformel lautet $y = a \cdot q^x$

Die Aufgabe:
Eine Bakterienkultur bedeckt zu Beginn eine Fläche von 15mm². Innerhalb von 10 Minuten vermehrt sie sich um 60%.

a.) Gib die zugehörige Funktionsgleichung an.
b.) Stelle den Wachstumsprozess für die 1. Stunde in einer Wertetabelle und als Graph dar.
c.) Entnimm deiner Zeichnung, nach welcher Zeit die Bakterienkultur auf 200 Quadratmillimeter angewachsen ist.

Zu erst einmal halten wir fest:
Wie ist der Anfangszustand?
Der Text sagt uns, dass zu Beginn eine Fläche von 15 mm² bedeckt wird. Und dieser Anfangszustand ändert sich mit der Zeit, wird also stets mit einem bestimmten Faktor multipliziert (die Zahl kann sich vergrößern oder auch verkleinern – je nach Faktor). In unserer allgemeinen Formel findet in der Basis eine Multiplikation statt. Das a ist hierbei der Anfangszustand (also die 15 mm²), q ist der Faktor, um den dieser Anfangszustand geändert wird. Wir lesen weiter und sehen, dass es sich um eine Änderung von 60 % handelt. Das entspricht dem Faktor 1,6 (falls unverständlich,

bitte mit dem Thema Prozentrechnung befassen).
Nun ist noch die Frage, was der Exponent aussagt.

Nehmen wir an, wir möchten wissen, wie sich der Anfangszustand nach einmal 10 Minuten ändert. Dann rechnen wir:
$15 \cdot 1{,}6 = 24$.
Wenn wir jetzt nochmal 10 Minuten weiterspringen, dann müssen wir diesen neuen Stand (24 mm) nochmal mit 1,6 multiplizieren. Also:
$24 \cdot 1{,}6 = 38{,}4$ mm.
Wir haben also gerechnet:
$15mm^2 \cdot 1{,}6 \cdot 1{,}6 = 38{,}4mm$.
Das ist nichts anderes als
$15 \cdot 1{,}6^2$.
Und wenn wir wissen wollen, wie das nach 30 Minuten aussieht, dann rechnen wir entsprechend:
$15mm \cdot 1{,}6 \cdot 1{,}6 \cdot 1{,}6 = 15mm^2 \cdot 1{,}6^3 = 61{,}44mm$.

Der Exponent ist also für die zeitliche Angabe entscheidend. Jetzt müssen wir uns darum kümmern, dass er in unserem konkreten Fall korrekt ausfällt. Wir wollen, dass bei $x = 10$ Minuten der Exponent gleich 1 ist (das hieße dann, dass die Formel so aussieht:
$y = 15 \cdot 1{,}6^1$
Nach $x = 20$ Minuten soll der Exponent gleich 2 sein, dann sähe die Rechnung so aus:
$y = 15 \cdot 1{,}6^2$

Und so weiter.
Also müssen wir dafür sorgen, dass das x im Exponenten durch 10 geteilt wird. Das müssen wir auch angeben, deshalb sieht unsere Formel dann also wie folgt aus (s. u.)

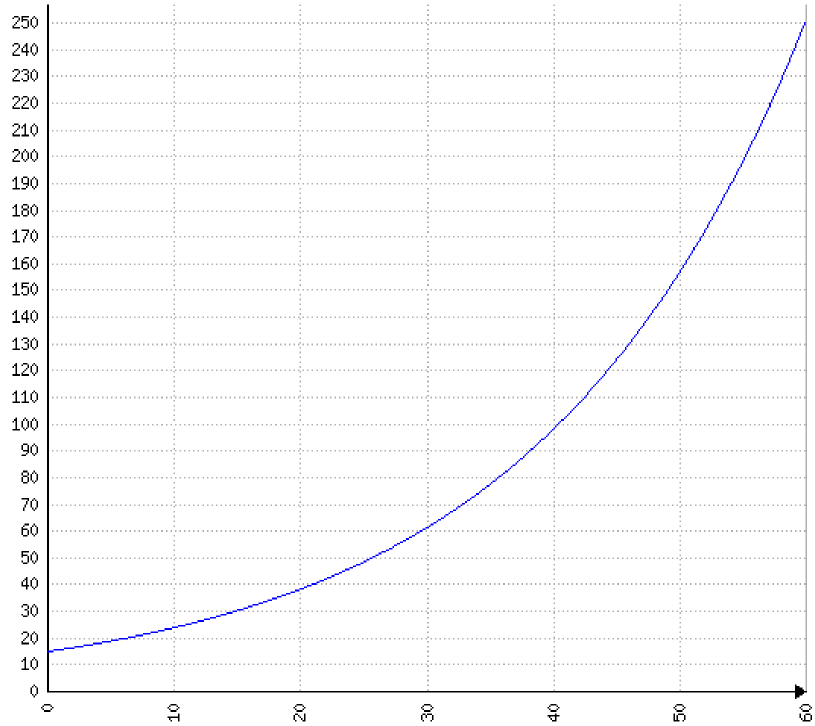
Zu a)

$y = 15 \cdot 1{,}6^{(x/10)}$

(x = Minuten)

Zu b)

x [min]	0	10	20	30	40	50	60
Bakterienfläche [mm]	15	24	38,4	61,44	98,3	157,29	251,66



Zu c)

Der Zeichnung ist zu entnehmen, dass die 200mm²-Marke nach knapp 55 Minuten erreicht ist.